УДК 51.519.6

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ЭЛАСТИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ

Ш.Каримов, А.Адилов

Самаркандский государственный университет

Аннотация. В случае больших деформации необходимо учитывать нелинейный характер объемного вклада. Предлагаемый смешанный метод в этом случае также позволяет избежать объемной блокировки и является устойчивым для $\lambda \to \infty$. Оценки погрешности для нормы L^∞, имеют решающее значение в управлении нелинейными членами.

Ключевые слова: эластическая проблема, метод конечных элементов, параметрическая функция, несжимаемый материал нео-Гука.

A finite element method for elasticity problems

Sh.Karimov, A.Adilov

Abstract. In the case of large strains, it is necessary to take into account the nonlinear nature of the volume contribution. The proposed mixed method in this case also avoids volumetric blocking and is stable for $\lambda \to \infty$. Error estimates for the L^∞ norm are crucial in managing nonlinear terms.

Keywords: elasticity problem, finite element method, parametrical function, incompressible material of neo-Hooken.

Изопараметрические низкоординатные помехи очень популярны в механике твердого тела из-за их простоты. Основным недостатком, однако, является так называемая блокировка эффекта. В частности, объемная блокировка встречается, когда материал почти несжимаем. В случае линейной эластичности стало хорошо известно, как преодолеть блокировку численно, и несколько популярных методов было доказано, что они эквивалентны.

Недавно также была упрощена математическая обработка. Ситуация с нелинейной упругостью менее удовлетворительна. В настоящей статье мы рассмотрим почти несжимаемый материал нео-Гука. Пусть v - поле смещанний в ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ с гладкой границей. Накопленная энергия и нагрузка дают общую энергию:

$$J_\lambda(v) := {C_0}/{2}\int\limits_\Omega (|Id+\nabla v|^2-2)dx+{\lambda}/{2}\int\limits_\Omega \left|\det\left(Id+\nabla v\right)-1\right|^2 dx-\int\limits_\Omega fvdx. \qquad (1.1)$$

Здесь, C_0 является положительным физическим параметром, связанный с параметром μ, а λ является характеристикой сжимаемости. В частности, здесь у нас есть $\lambda \gg C_0$. Для точности обозначим $C_0\equiv 1$ в дальнейшем. Эта модель (и ее анализ) имеет характерную черту нелинейных теорий. Мы находим определитель $\det(Id+\nabla v)$ в выражениях в тех местах, где $divv$ встречается в линейных теориях. Результате, смещение $u=(u_1,u_2)$ характеризуется минимизацией $J_\lambda(v)$, т.е.

$$J_\lambda(u)=\min_{v\in W} J_\lambda(v)\,, \qquad (1.2)$$

где $W:=\left\{v\in W_0^{1,4}(\Omega)\middle|\det(Id+\nabla v)>0,\Omega\right\}$.

Вышеупомянутая проблема минимизации часто используется в промышленности для моделирования нео-Гука почти несжимаемого материала. Натуральный каучук является типичным примером почти несжимаемого материала и материалов, которые подвергаются пластическим деформациям, также может считаться почти несжимаемым. Эта модель также встречается при жестком несжимаемом ограничении в точке $\det(Id+\nabla v)=1$, который решается способом штрафных терминов, введенным Огденом. Вышеупомянутое ограничение сводится к известному линейному несжимаемому условию в линейной упругости или динамике несжимаемой жидкости, т.е. $\mathrm{d}iv(v)=0$. Модель также может рассматриваться как двумерный случай материала Муни-Ривлина; можно видеть, что u и p сходятся к решениям для несжимаемого нео-Гука материала при приближении λ к ∞, если сила тела $f \in L^2(\Omega)$.

Преимущество этой модели состоит в том, что она основана на формулировку ориентированной смещение, которая облегчает реализацию. Модель избегает жестких ограничений. С другой стороны, есть большой параметр и опасность блокировки. Чтобы избежать блокировки в данной нелинейной задаче, мы будем использовать приведенный функционал энергии при выполнении дискретизации с конечными элементами младшего порядка.

Пусть X_h- пространство конечных элементов, решение u_h минимизирует функционал приведенной энергии

$$J_{\lambda,h}(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega (|Id + \nabla v|^2 - 2)dx + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |\Pi_0(\det(Id + \nabla v) - 1)|^2 dx - \int_\Omega fvdx,$$

где Π_0 обозначает L^2-проекцию на некоторое конечное пространство элемента M_h.

Анализ будет основана на эквивалентном смешанном методе. Для этого переменное давление вводится как,

$$p := \lambda(\det(Id + \nabla v) - 1)$$

и возникает формулировка седловой точки со штрафным слагаемым. Хотя такое метод $u-p$-формулировки эквивалентна с усилением предполагаемых деформаций используется в линейном случае. В нелинейном случае есть некоторые отличия. Вместо использования проекции определителя $Id + \nabla v$.

Например, можно рассмотреть проекции четырех матричных элементов. Это будет использовано в предстоящем этапе. Нелинейная задача будет рассмотрена с помощью гомотопического аргумента. Поскольку нелинейности ограничены нормами L^{∞}, погрешность L^{∞} должна контролироваться для гомотопии. Как следствия, мы получаем логарифмические члены с большей степенью, чем в линейном случае.

Подчеркнем, что нам не требуется малость нелинейностей. Достаточно иметь хорошую дискретизацию, чтобы можно было управлять нелинейными членами с разностью $u-u_h$ и $p-p_h$.

Обозначим Ω функцию через $W^{m,p}(\Omega)$ с помощью стандартное Соболевское пространство, снабженное нормой и полунормой как,

$$\|v\|_{m,p}^{p} := \sum_{k=0}^{m} |v|_{k,p}^{p} \qquad \text{и} \qquad \|v\|_{m,p}^{p} := \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=k} |\sigma^{\alpha} v|^{p}\, dx.$$

Здесь $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ - мульти-индекс, чьи компоненты α_i являются неотрицательными целыми числами, в результате получим - $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2$ и $\sigma^{\alpha}=\partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}$. Для краткости, если $p=2$, индекс p будет отброшено, $W^{m,2}(\Omega)$ обозначим как $H^m(\Omega)$. Как обычно, $H_0^1(\Omega)$ является подпространством функций $H^1(\Omega)$ с исчезающими следами на $\Gamma:=\partial\Omega$, и $H_0^1(\Omega)$ которое соответствующее пространство 2-вектор-функций. В более общем смысле мы используем полужирные буквы для обозначения вектор-пространств и операторов. Более того, $H^{-1}(\Omega)$- это двойственное пространство $H_0^1(\Omega)$, обозначает двойное спаривание $H_0^1(\Omega)$ и $H^{-1}(\Omega)$ или $H_0'^{1}(\Omega)$ и $H'^{-1}(\Omega)$ соответственно. Внутреннее произведение в $L^2(\Omega)$.

Во множестве $X:=H_0^1(\Omega)$ и $M:=L^2(\Omega)$. Как обычно X' и M' являются двойственными пространствами. Для вектора $x\in R^2$ зададим $x^{\perp}:=x_2-x_1$. Для векторов $x=(x_1,x_2)$ и $y=(y_1,y_2)\in R^2$, $x\otimes y$- матрица 2×2 с элементами $(x\otimes y)_{ij}:=x_i y_j$. Для матрицы A, $\operatorname{adj} A:=(CofA)^T=CofA^T$, где $\operatorname{Cof} A$ матрица кофактора A. Матричный продукт определено как $A:B = tr(A^T B)$. Обратите внимание, что

$$\det(A+B) = \det A + cofA : B + \det B \tag{2.1}$$

справедливо для любых матриц 2×2. Проблема (1.2) все еще имеет нежелательное ограничение. Мы считаем, что минимизация упругой энергии (1.2) над $W^{1,2}(\Omega)$ вместо W и через точку ограничения $\det(Id+\nabla v)>0$ может быть задернута апостериори. Поскольку предполагаются нулевые граничные условия $\int_\Omega (|Id+\nabla v|^2 - 2)dx = \int_\Omega (\nabla v)^2 dx.$. Уравнение Эйлера-Лагранжа для минимизации (1.1) есть (2.2) $A(u,v) = \langle f, v\rangle$, $\forall v \in W_0^{1,4}(\Omega)$, с нелинейным функционалом $A(u,v) = (\nabla u, \nabla v) + \lambda(\det(Id+\nabla u) - 1, Cof\,(Id+\nabla u) : \nabla v)$.

В силу своей идентичности,

$$div(CofA) = 0, \tag{2.3}$$

всякий раз, когда A является градиентом гладкого векторного поля. Поэтому $A(u,v)$ можно переписать как,

$$A(u,v) = (\nabla u, \nabla v) + \lambda(\det(Id+\nabla u) - 1, div(adj(Id+\nabla u)v)). \tag{2.4}$$

Использованные источники:

1. P.Grisvard,Elliptic Problems in Nonsmooth Domains, Pitman, Boston 1985.

2. H.Le Dret, Constitutive laws and existence questions in incompressible nonlinear elasticity, 369-387(1985).

3. L.R.Treloar, The Physics of Rubber Elasticity, Oxford University Press, Oxford, 1975.

4. P.G. Ciarlet, Finite Element Methods for Elliptic Problems, North-Holland, Amsterdam, 1978.