***Давлатов Ш.О.***

**Университет экономики и педагогики**

***Узбекистан, г.Карши***

# ТЕОРЕМА ОБ ОДНОМ ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ ПОД ЗНАК ИНТЕГРАЛА

*Аннотация. В этой статье приведено доказательство теоремы об одном предельном переходе под знак интеграла.*

*Ключевые слова. Предельный переход, под знак интеграла, теорема Лебега, последовательность функций.*

***Davlatov Sh.O.***

***University of Economic and Pedagogy***

***Uzbekistan, Karshi***

*Abstract. This article provides a proof of the theorem on one limit transition under the sign of the integral.*

*Keywords. Limit transition, under the sign of the integral, Lebesgue's theorem, sequence of functions.*

Пусть функции $\{f_n(x)\}, f(x)$ измеримы на $A$. Докажем следующую теорему.

**1-теорема.** Если выполняются следующие условия:

1. Последовательность функций $\{|f_n(x)|\}$ на $A$ сходится к $|f(x)|$.
2. При всех $n$

$$|f_n(x)| \leq \psi(x),$$

где $\psi(x)$ - интегрируема на $A$.

3. Справедливы следующие равенства

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A} f_n^{\pm}(x)dx = \int_{A} f^{\pm}(x)dx,$$

где

$$f_n^{+}(x) = \max(0, f_n(x)),$$

$$f_n^{-}(x) = \min(0, f_n(x)),$$

$$f^{+}(x) = \max(0, f(x)),$$

$$f^{-}(x) = \min(0, f(x)),$$

тогда

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A} f_n(x)dx = \int_{A} f(x)dx.$$

**Доказательство.** Пусть выполняются условия теоремы. Тогда по теореме Лебега следует, что $|f(x)|$ интегрируема на $A$ и

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A} |f_n(x)|dx = \int_{A} |f(x)|dx.$$

Из интегрируемости $|f(x)|$ следует интегрируемость $f(x)$ на $A$ [5]. Очевидно, что

$$f_n(x) = f_n^{+}(x) + f_n^{-}(x),$$

$$f(x) = f^{+}(x) + f^{-}(x).$$

Вычислим пределы

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A} |f_n(x)|dx = \lim_{n\to\infty}\int_{A} \left( f_n^{+}(x) + \left|f_n^{-}(x)\right|\right)dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{A} f_n^{+}(x)dx + \lim_{n\to\infty}\int_{A} \left|f_n^{-}(x)\right|dx =$$

$$= \int_{A} f^{+}(x)dx + \int_{A} \left|f^{-}(x)\right|dx.$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_A \left(f_n^+(x)+f_n^-(x)\right)dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_A f_n^+(x)dx - \lim_{n\to\infty}\int_A \left|f_n^-(x)\right|dx =$$

$$= \int_A f^+(x)dx - \int_A \left|f^-(x)\right|dx =$$

$$= \int_A f^+(x)dx + \int_A f^-(x)dx =$$

$$= \int_A \left(f^+(x)+f^-(x)\right)dx = \int_A f(x)dx.$$

Теорема доказана.

**Замечание.** Поскольку значения, принимаемые функцией на множестве меры 0, не влияют на величину интеграла, в теореме достаточно предположить, что $\{|f_n(x)|\}$ сходится к $|f(x)|$ почти всюду и $|f_n(x)|\le\psi(x)$ также выполняется почти всюду.

Литературы.


1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа. М., «Наука», 1989.