Ахмедова Ф.А.,

преподаватель математики академического лицея Ташкентского Международного Вестминстерского университета,

Хабибуллина М.М,

преподаватель математики академического лицея Ташкентского Туринского Политехнического университета

ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

APPLIED METHODS FOR CALCULATING LIMITS

Аннотация: в статье рассматриваются практические методы расчета пределов.

Ключевые слова: Предел, вычисление пределов, практические методы расчета, математика.

Abstract: the article discusses practical methods for calculating limits.

Keywords: Limit, calculation of limits, practical calculation methods, mathematics.

В практическом курсе математического анализа неизбежно возникают затруднения в решении пределов, связанные с логическими нарушениями осмысленности предельных выражений. Эти нарушения традиционно называют «неопределённостями» в силу возможности их принимать произвольное, не предсказуемое значение. Чтобы избавиться от неопределённости (как говорится, «раскрыть неопределённость»), нужно провести преобразования выражений, при которых значения выражений сохраняется, но изменяется форма выражения таким образом, что неопределённость исчезнет и уже можно пользоваться арифметическими свойствами или особыми случаями.

1. Раскрытие неопределённости вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Согласно основному свойству дроби, если умножить или разделить числитель и знаменатель на одно и то же выражение, отличное от нуля, её значение при этом не изменится.

Эффективен приём деления числителя и знаменателя на старшую степень переменной, стоящей в знаменателе. Можно делить на старшую степень переменной, стоящей в числителе, или на старшую степень переменной, встречающуюся во всём выражении, но в первом случае гарантировано, что предел знаменателя преобразованной дроби будет конечен и отличен от нуля.

Можно доказать, что значение предела определяется старшими степенями числителя и знаменателя, а именно:

1) Если степень числителя меньше степени знаменателя, предел равен нулю.
2) Если степень числителя больше степени знаменателя, предел бесконечен.
3) Если степени числителя и знаменателя равны, предел равен отношению коэффициентов при старших степенях числителя и знаменателя.

Пример 1: а) Найти предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3x+2}{3x^2+x+1}\right)$

Решение: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+2}{3x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=$(теперь дробь можно сократить на x^2) $=\frac{2-3\cdot 0+2\cdot 0}{3+0+0}=\frac{2}{3}$.

б) Найти предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$

Решение: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}= =\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x^4}}{\sqrt{\frac{x^8+3x+4}{x^8}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x^7}+\frac{4}{x^8}}}=\frac{3}{1}=3$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x^2}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x^2}=$ (разделим числитель и знаменатель на старшую степень переменной

x^2)$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}}{\frac{\sqrt[4]{x^3+x}}{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^4}}+\sqrt{\frac{x}{x^4}}}{\sqrt[4]{\frac{x^3+x}{x^8}}-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^7}}-1}=\frac{0}{-1}=0.$

2. Раскрытие неопределённости вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Неопределённость вида «нуль, делённый на нуль» вызывает самое большое затруднение у учащихся, вызванное глубинным запретом «на нуль делить нельзя!». Главной задачей преподавателя является разъяснение принципиального отличия деления на нуль от деления на бесконечно малую величину. Для устранения подобной неопределённости нужно в числителе и знаменателе выделять множитель вида «переменная минус её предельное значение» и сокращать полученную дробь. После этого неопределённость может исчезнуть и уже можно пользоваться арифметическими свойствами или особыми случаями, или же нужно снова применить описанный приём.

- В случае отношения многочленов возможность выделения множителя вида «переменная минус её предельное значение» доказывается в курсе алгебры, она следует из рассматриваемой в теории многочленов теоремы Безу, которая гласит, что число x_o является корнем многочлена $P_n(x)$ тогда и только тогда, когда многочлен делится без остатка на двучлен $(x - x_o)$.

- Для выделения множителя (x - x_0) можно использовать деление многочлена на многочлен «уголком», схему Горнера, формулы сокращённого умножения или удачную группировку.

- В случае наличия иррациональностей сначала нужно избавиться от иррациональности, дающей неопределённость, путём умножения на сопряжённое выражение либо на недостающую часть формулы сокращённого умножения.

Важно понимать, что вообще избавиться от иррациональности при этом не удастся, она переместится из числителя в знаменатель либо обратно, да это и не нужно: сама по себе она не опасна, если только не приводит к неопределённости.

Пример 2: Вычислить пределы:

$$\text{а) } \lim_{x\to 1/2}\frac{2x^2-7x+3}{8x^3-1}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}.$$

Решение: а) При подстановке $x=\frac{1}{2}$ в числитель и знаменатель они обращаются в нуль. Следовательно, имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Разложим числитель и знаменатель на множители и перейдем к пределу

$$\lim_{x\to 1/2}\frac{2x^2-7x+3}{8x^3-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1/2}\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)}{(2x-1)(4x^2+2x+1)}=\lim_{x\to 1/2}\frac{(2x-1)(x-3)}{(2x-1)(4x^2+2x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1/2}\frac{x-3}{4x^2+2x+1}=\frac{1/2-3}{4\cdot 1/4+2\cdot 1/2+1}=-\frac{5}{6}.$$

б) В этом примере имеем неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$. Поскольку выражение содержит квадратичные иррациональности – разности корней, умножим числитель и знаменатель на произведение сопряженных им иррациональностей – сумм корней $\left(2+\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)$, получим

$$\lim_{x\to 4}\frac{\left(2-\sqrt{x}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{\left(3-\sqrt{2x+1}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{\left(2+\sqrt{x}\right)(9-2x-1)}=$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(3+\sqrt{2x+1}\right)}{\left(2+\sqrt{x}\right)(8-2x)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(3+\sqrt{2x-1}\right)}{2\left(2+\sqrt{x}\right)(4-x)}=\lim_{x\to 4}\frac{3+\sqrt{2x+1}}{2\left(2+\sqrt{x}\right)}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}.$$

3. Раскрытие неопределённости вида $(\infty-\infty)$

Чтобы раскрыть эту неопределённость, нужно разность привести к виду дроби, например, умножением и делением на сопряжённое выражение или приведением дробей к общему знаменателю. В результате либо неопределённость исчезнет, либо ситуация сведётся к одному из особых случаев, либо можно будет воспользоваться арифметическими свойствами.

Пример 3: Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

Решение**:** Имеем неопределенность $(\infty-\infty)$. Приведем разность к виду дроби:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0.$$

4. Неопределённость вида $\left(1^{\infty}\right)$.

На первый взгляд бывает неясно, что $\left(1^{\infty}\right)$ действительно представляет ситуацию неопределённости. Это становится понятным после нахождения хотя бы одного предела, который окажется отличным от ***e***. Для раскрытия неопределённости вида $\left(1^{\infty}\right)$ выполняются следующие тождественные преобразования**:**

- Сначала в основании степени нужно выделить ту бесконечно малую, которая прибавляется к единице и в показателе степени записать в точности обратную ей величину (если в основании имеется разность, то знак минус относится к бесконечно малой). Сконструированная таким образом величина будет иметь своим пределом число *e*, это выражение целесообразно заключить в скобки.

- Затем в показателе степени, основанием которой является выражение в скобках, записать исходный показатель степени с поправочным множителем, который подбирается так, чтобы при возведении степени в степень (т.е. при перемножении всех показателей) получить исходное выражение.

- Наконец, находится предел показателя степени, основанием которой является выражение в скобках, и записывается ответ.

Пример 4: Найти:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+2}{2x^2-1}\right)^{x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+3)\left[\ln(x-2)-\ln x\right]$, в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+tgx)^{2ctgx}$

Решение: а) Имеем неопределённость вида $\left(1^{\infty}\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+2}{2x^2-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-1+3}{2x^2-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-1}{2x^2-1}+\frac{3}{2x^2-1}\right)^{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x^2-1}\right)^{\frac{2x^2-1}{3}\cdot\frac{3x^2}{2x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{2x^2-1}\right)^{\frac{2x^2-1}{3}}\right)^{\frac{3x^2}{2x^2-1}}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\left(1+\frac{3}{2x^2-1}\right)^{\frac{2x^2-1}{3}}\to e\\ \text{при } x\to\infty\end{array}\right]=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3x^2}{2x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3x^2}{x^2\left(2-1/x^2\right)}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3}{2-1/x^2}}=\boldsymbol{e}^{1,5}$$

б) Имеем сложную на первый взгляд неопределённость $(\infty(\infty-\infty))$.

Преобразуем выражение к виду, дающему неопределённость $\left(1^{\infty}\right)$, пользуясь известными правилами действия с логарифмами.

$$\lim_{x\to\infty}(2x+3)\left[\ln(x-2)-\ln x\right]=\lim_{x\to\infty}\ln\left[\frac{x-2}{x}\right]^{2x+3}=$$ (согласно свойству непрерывности логарифмической функции, можно перейти к пределу в логарифмируемом выражении) $$=\ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{2x+3}\right]=\ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{2x+3}\right]=$$

$$=\ln\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x/2}\right)^{-\frac{x}{2}}\right]^{-\frac{2}{x}\cdot(2x+3)}=\ln\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x/2}\right)^{-\frac{x}{2}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2(2x+3)}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2(2x+3)}{x}=-2\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x}\right)=-4.$$

Итак, теперь легко получить ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/2}\right)^{x/2}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2(2x+3)}{x}}=\ln e^{-4}=-4$

в) Имеем неопределённость вида $\left(1^{\infty}\right)$. Выполняем тождественные преобразования: $\lim\limits_{x\to0}(1+tg)^{2ctgx}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+tgx\right)^{\frac{1}{tgx}}\right]^{2}=e^{2}$.

5. Применение эквивалентных соотношений

Эти соотношения, содержащие трансцендентные (логарифмическую, показательную, общую степенную) функции и алгебраическую иррациональность высокой степени, используют для раскрытия неопределённости вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

При этом запись решения получается более компактной, чем при преобразованиях, которые необходимо проделать при непосредственном применении следствий второго замечательного предела.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1-\sin 2x}-1\right)\left(e^{\operatorname{arctg}^2 3x}-1\right)}{(1-\cos 2x)\ln(1+5x)}$.

Решение: Имеем неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Запишем цепочки эквивалентных бесконечно малых функций:

$$\sqrt{1-\sin 2x}-1=\left(1-\sin 2x\right)^{1/2}-1\sim\frac{1}{2}\left(-\sin 2x\right)\sim\frac{1}{2}\left(-2x\right)=-x,$$

$$e^{\operatorname{arctg}^2 3x}-1\sim\left(\operatorname{arctg} 3x\right)^2\sim\left(3x\right)^2=9x^2,\ 1-\cos 2x\sim\frac{\left(2x\right)^2}{2}=2x^2.$$

Учитывая это, на основании принципа замены бесконечно малых эквивалентными, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1-\sin 2x}-1\right)\left(e^{\operatorname{arctg}^2 3x}-1\right)}{\left(1-\cos 2x\right)\ln\left(1+5x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{(-x)9x^2}{2x^2\cdot 5x}=-\frac{9}{10}.$$

Использованная литература:

1. Ё.Юсупав. Высшая математика. Методическое пособие. ТУИТ ФФ., 2012.

2. Ботирова, Н. (2020). Обучающие возможности тестовых технологий. *Профессиональное образование и общество*, (3), 68-71.

3. Ботирова, Н. Д. (2019). РАЗВИТИЮ ПРОДУКТИВНОГО МЫШЛЕНИЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ. *Гуманитарный трактат*, (61), 4-6.