УДК 517.518.14

Нгуен Ван Куинь

Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель

Факультета фундаментальной науки,

университет Ханой промышленности, Ha Noi, Вьетнам.

E-Mail: nguyenvanquynh@haui.edu.vn.

Ле Ань Тханг

Магистр математических наук, старший преподаватель

Факультета фундаментальной науки, университет Ханой промышленности, Ha Noi, Вьетнам.

E-Mail: le.thang@haui.edu.vn.

КОМПАКТНЫЕ СВОЙСТВА МНОЖЕСТВ В ПРОСТРАНСТВЕ РАДОНОВЫХ МЕР

Аннотация: *Теория меры играет важную роль в теории субгармонических и δ-субгармонических функций. Классические свойства меры были представлены во многих монографиях, например в [1]. В статье представляется усиление варианта Азарина теоремы об компактном множестве в пространстве радоновых мер. Результаты нашей статьи позволяют несколько упростить конструкции из этих работ.*

Ключевые слова: *мера Хана, мера Жордана, сингулярная положительная мера, линейный непрерывный функционал, радоновая мера .*

Nguyen Van Quynh.

PhD in Physics and Mathematics, Lecturer

Faculty of Basic Science, Hanoi University of Industry, Ha Noi, Vietnam

E-Mail: nguyenvanquynh@haui.edu.vn.

Le Anh Thang.

Master of Mathematical Sciences, Lecturer

Faculty of Basic Science, Hanoi University of Industry, Ha Noi, Vietnam.

E-Mail: le.thang@haui.edu.vn.

COMPACT PROPERTIES OF SETS
IN THE SPACE OF RADON MEASURES

Abstract: *Measure theory plays an important role in the theory of subharmonic and δ-subharmonic functions. The classical properties of a measure have been presented in many monographs, for example, in [1]. In the article we sharpen Azarin's variant of the theorem on a compact set in the space of Radon measures. The results of our article allow us to simplify the constructions from these articles somewhat.*
Key words: *Hahn measure, Jordan measure, singular positive measure, linear continuous functional; Radon measures, compact set.*

Сначала вводим некоторые обозначения:

$\mathbb{R}_0^n = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$; $C(z_0, r) = \{z : \|z - z_0\| < r\}$; $B(z_0, r) = \{z : \|z - z_0\| \leq r\}$.

Φ – это линейное пространство непрерывных финитных функций на $\mathbb{R}_0^n$. Будут рассматриваться как вещественные, так и комплексные пространства Φ.

Напомним теперь некоторые определения и результаты из теории интеграла и меры.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}_0^n$ определена вещественная борелевская мера μ, $E \subset \mathbb{R}_0^n$ – борелевское множество. Ограничением (сужением) меры μ на множество E называется мер μ_E, которая определяется формулой $\mu_E(A) = \mu(A \cap E)$ для любого борелевского мно-жества $A \subset \mathbb{R}_0^n$.

Величина $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$, называется полной вариацией или модулем меры μ.

Вещественная борелевская мера μ на $\mathbb{R}_0^n$ называется локально конечной, если для любого компакта $K \subset \mathbb{R}_0^n$ выполняется неравенство $|\mu|(K) < \infty$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_1$ семейство функций множеств , представимых в виде $\mu = \mu_1 - \mu_2$, где μ_1, μ_2 вещественные локально конечные борелевские меры на $\mathbb{R}_0^n$. функция μ определена на борелевских множествах $E \subset \mathbb{R}_0^n$ за исключением тех E, для которых $\mu_1(E) = \mu_2(E)$.

Теорема 1. (С.М [4]). Всякий элемент $\mu \in \mathfrak{M}_1$ эквивалентен разности $\mu_1 - \mu_2$, где где μ_1 и μ_2 – положительные взаимно сингулярные локально конечные борелевские меры на $\mathbb{R}_0^n$. Причем μ_1 и μ_2 определяются однозначно.

Вещественной радоновой мерой на $\mathbb{R}_0^n$ называется класс эквивалентных элементов из множества $\mathfrak{M}_1$. Множество таких мер обозначим $\mathfrak{R}$.

Из теоремы 1 легко следует, что множество $\mathfrak{R}$ является вещественным линейным пространством. Проверить это свойство, исходя из определении $\mathfrak{R}$, достаточно затруднительно.

Мы будем рассматривать также комплексные меры Радона. Это функции множеств вида $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, где μ_1 , μ_2 – вещественные радоновые меры. Ограничение меры μ на множество E определяется по формуле $\mu_E = (\mu_1)_E + i(\mu_2)_E$. Комплексная мера Радона μ сосредоточена на множестве E, если выполняется равенство $\mu = \mu_E$.

Обозначим через $\mathfrak{R}_C$ – это множество комплексных радоновых мер на $\mathbb{R}_0^n$. Отметим, что $\mathfrak{R}_C$ является комплексным линейным пространством. В пространстве $\mathfrak{R}_C$ вводится понятие широкой сходимости. Говорят, что последовательность радоновых мер μ_m широко сходится к радоновой мере μ , если для любой функции $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}_0^n)$ числовая последовательность $\mu_m(\varphi)$ сходится к $\mu(\varphi)$. Обозначение $\mu = \lim\limits_{m\to\infty} \mu_m$.

Вводятся некоторые понятия множеств, связанные с пространством $\mathfrak{R}_C$.

Множество $E \subset \mathfrak{R}_C$ называется широко ограниченным, если для любой функции $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}_0^n)$ выполняется неравенство $\sup\limits_{\mu\in E}|\mu(\varphi)| < \infty$.

Множество $E \subset \mathfrak{R}_C$ называется сильным ограниченным, если для любого компакта $K \subset \mathbb{R}_0^n$ выполняется неравенство $\sup\limits_{\mu\in E}|\mu|(K) < \infty$.

Множество $E \subset \Re_C$ называется компактным, если из любой последовательности $\mu_m \subset E$ можно извлечь широко сходящуюся подпоследовательность.

Компактный множество в $\Re_C$, содержащее пределы широко сходящихся последовательностей элементов этого множества, называется компактом.

Теорема 2. (СМ. [5]) Всякая широко ограниченное множество в $\Re_C$ является сильно ограниченным множеством.

Для множества положительных мер признак сильной ограниченности можно усилить.

Теорема 3. Пусть E – множество положительных радоновых мер на $\square_0^n$, Φ_1 – всюду плотно множество в пространстве $\Phi(\square_0^n)$. Тогда если множество $\{|(\mu,\varphi)| : \mu \in E\}$ ограничено для любой функции $\varphi \in \Phi_1$, то множество E сильно ограничено.

Доказательство. Пусть $K \subset \square_0^n$ – компакт. В множестве Φ_1 найдётся такая функция φ, что будет выполняться неравенство $\chi_K(z) = \varphi(z)$. Пусть $\mu \in E$. Тогда

$$\mu(K) = \int_{\square_0^n} \chi_K(z) d\mu(z) \le \int_{\square_0^n} \varphi(z) d\mu(z) \le \sup\{(\mu,\varphi) : \mu \in E\}.$$

Из этого следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Теорема 4. (критерий компактности). Для того, чтобы множество $H \subset \Re_C$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было широко ограниченным.

Доказательство. Необходимость. Докажем от противного. Пусть $H \subset \Re_C$ – компактное множество. Допустим, что оно не является широко ограниченным. Тогда существует функция $\varphi \in \Phi(\square_0^n)$ и последовательность $\mu_m \in H$ такие, что выполняется неравенство $|(\mu_m,\varphi)| \ge m$. Но у последовательности μ_m есть сходящаяся подпоследовательность. Получили противоречие. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $H \subset \Re_C$ – широко ограниченное множество. По теореме 3.2 оно является сильным ограниченным. Это означает, что для любого $m \ge 2$ существует конст-анта M_m такая, что $|\mu|\left(B(0,m) \setminus C\left(0,\frac{1}{m}\right)\right) \le M_m$ для любой меры $\mu \in H$. Пусть μ_p произвольная последовательность мер из H. По теореме Алаоглу у последовательности μ_p есть подпоследовательность

$\mu_p^{(1)}$, которая слабо сходится к некоторой мере $\hat{\nu}_2$ на компакте $B(0,2)\setminus C\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Из метода математической индукции следует, что существует последовательность $\mu_p^{(k)}$, $k=2,3,...,$ такая, что последовательность $\mu_p^{(k+1)}$ является подпоследовательностью последовательности $\mu_p^{(k)}$ и последовательность $\mu_p^{(k)}$ слабо сходится к некоторой мере $\hat{\nu}_k$ на компакте $B(0,k)\setminus C\left(0,\frac{1}{k}\right)$. Можно считать, что каждая мера $\hat{\nu}_k$ есть мера на $\mathbb{R}_0^n$, считая $\hat{\nu}_k$ равной нулю вне компакта $B(0,k)\setminus C\left(0,\frac{1}{k}\right)$. Тогда берём диагональную последовательность $\sigma_k=\mu_k^{(k)}$, которая будет слабо сходиться к мере $\hat{\nu}_m$ на компакте $B(0,m)\setminus C\left(0,\frac{1}{m}\right)$ для любого $m\geq 2$. Докажем, что $\hat{\nu}_{m+1}$ и $\hat{\nu}_{m+2}$ на компакте $B(0,m)\setminus C\left(0,\frac{1}{m}\right)$ совпадают. Берём функцию ψ, которая та же функция, что и в тексте доказательства предыдущей теоремы. Тогда $\psi\in C\left(B(0,m+1)\setminus C\left(0,\frac{1}{m+1}\right)\right)$, $\psi\in C\left(B(0,m+2)\setminus C\left(0,\frac{1}{m+2}\right)\right)$. Поэтому

$$\lim_{k\to\infty}(\sigma_k,\psi)=\int\limits_{B(0,m)\setminus C\left(0,\frac{1}{m}\right)}\psi(x)\,d\hat{\nu}_{m+1}(x)=\int\limits_{\mathbb{R}_0^n}\varphi(x)\,d\hat{\nu}_{m+1}(x).$$

$$\lim_{k\to\infty}(\sigma_k,\psi)=\int\limits_{\mathbb{R}_0^n}\varphi(x)\,d\hat{\nu}_{m+2}(x).$$

Далее, как и в доказательстве предыдущей теоремы, получаем совпадение ограничений мер $\hat{\nu}_{m+1}$ и $\hat{\nu}_{m+2}$ на компакте $B(0,m)\setminus C\left(0,\frac{1}{m}\right)$. Строим последовательность ν_m как ограничение меры $\hat{\nu}_{k+1}$ на компакте $B(0,m)\setminus C\left(0,\frac{1}{m}\right)$ и меру $\mu\in\Re_C$ такую, что для любого $m\geq 2$ ограничение μ на компакте $B(0,m)\setminus C\left(0,\frac{1}{m}\right)$ есть ν_m.

Теперь докажем, что последовательность σ_k сходится к μ. Пусть φ – произвольная функция из $\Phi\left(\mathbb{R}_0^n\right)$. Существует такое n, что

$$\operatorname{supp}\varphi\subset\left(B(0,m)\setminus C\left(0,\frac{1}{m}\right)\right)\subset\left(B(0,m+1)\setminus C\left(0,\frac{1}{m+1}\right)\right).$$

Поскольку последовательность σ_k слабо сходится к $\hat{\nu}_{k+1}$ на компакте $B(0,m+1)\setminus C\left(0,\frac{1}{m+1}\right)$, то $\lim\limits_{m\to\infty}(\sigma_k,\varphi)=(\hat{\nu}_{m+1},\varphi)=(\nu_m,\varphi)=(\mu,\varphi)$. Теорема доказана.

Говорят, что сеть радоновых мер μ_r, $r\in(0,\infty)$, широко сходится к мере ν при $r\to\infty$, если для любой функции $\varphi\in\Phi\left(\mathbb{R}_0^n\right)$ выполняется равенство

$$\lim_{r\to\infty}(\mu_r,\varphi)=(\nu,\varphi).$$

Список литературы

1. Kadets, V.M. (2006), A course of Functional Analysis, Kharkov National University.
2. Van Quynh Nguyen (2015), Various Types of Convergence of Sequences of Subharmonic Functions, Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom,Volume 11, Number 1, 63–74.
3. Nguyen Van Quynh, Theorem on uniform continuity of Logarithmic potential, Visnyk of science and education, Issue 5 (59), 6-10p.
4. Nguyen Van Quynh, Le Anh Thang (2021), THEOREM ON THE REPRESENTATION MEASURES "Мировая наука" №3 (48) 2021.
5. Nguyen Van Quynh, Le Anh Thang (2021), THEOREM ON A COMPACT SET IN THE SPACE OF RADON MEASURES "Мировая наука" №11 (56) 2021.