УДК 517.518.14

Нгуен Ван Куинь
Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель
Факультета фундаментальной науки,
университет Ханой промышленности, Ha Noi, Вьетнам.
E-Mail: nguyenvanquynh@haui.edu.vn.
Ле Ань Тханг
Магистр математических наук, старший преподаватель
Факультета фундаментальной науки, университет Ханой
промышленности, Ha Noi, Вьетнам.
E-Mail: le.thang@haui.edu.vn.

ТЕОРЕМА ОБ КОМПАКТНОМ МНОЖЕСТВЕ В ПРОСТРАНСТВЕ РАДОНОВЫХ МЕР

Аннотация: *Теория меры играет важную роль в теории субгармонических и δ-субгармонических функций. Классические свойства меры были представлены во многих монографиях, например в [1]. В статье представляется усиление варианта Азарина теоремы об компактном множестве в пространстве радоновых мер. Результаты нашей статьи позволяют несколько упростить конструкции из этих работ.*

Ключевые слова: *мера Хана, мера Жордана, сингулярная положительная мера, линейный непрерывный функционал, радоновая мера* .

Nguyen Van Quynh.
PhD in Physics and Mathematics, Lecturer
Faculty of Basic Science, Hanoi University of Industry, Ha Noi, Vietnam
E-Mail: nguyenvanquynh@haui.edu.vn.
Le Anh Thang.
Master of Mathematical Sciences, Lecturer
Faculty of Basic Science, Hanoi University of Industry, Ha Noi, Vietnam.
E-Mail: le.thang@haui.edu.vn.

THEOREM ON A COMPACT SET IN THE SPACE OF RADON MEASURES

Abstract: *Measure theory plays an important role in the theory of subharmonic and δ-subharmonic functions. The classical properties of a measure have been presented in many monographs, for example, in [1]. In the article we sharpen Azarin's variant of the theorem on a compact set in the space of Radon measures. The results of our article allow us to simplify the constructions from these articles somewhat.*

Key words: *Hahn measure, Jordan measure, singular positive measure, linear continuous functional; Radon measures, compact set.*

Сначала вводим некоторые обозначения:

$\mathbb{R}_0^n = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$; $C(z_0, r) = \{z: \|z - z_0\| < r\}$; $B(z_0, r) = \{z: \|z - z_0\| \leq r\}$.

Φ – это линейное пространство непрерывных финитных функций на $\mathbb{R}_0^n$. Будут рассматриваться как вещественные, так и комплексные пространства Φ.

Напомним теперь некоторые определения и результаты из теории интеграла и меры.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}_0^n$ определена вещественная борелевская мера μ, $E \subset \mathbb{R}_0^n$ – борелевское множество. Ограничением (сужением) меры μ на множество E называется мер μ_E, которая определяется формулой $\mu_E(A) = \mu(A \cap E)$ для любого борелевского мно-жества $A \subset \mathbb{R}_0^n$.

Величина $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$, называется полной вариацией или модулем меры μ.

Вещественная борелевская мера μ на $\mathbb{R}_0^n$ называется локально конечной, если для любого компакта $K \subset \mathbb{R}_0^n$ выполняется неравенство $|\mu|(K) < \infty$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_1$ семейство функций множеств , представимых в виде $\mu = \mu_1 - \mu_2$, где μ_1, μ_2 вещественные локально конечные борелевские меры на $\mathbb{R}_0^n$. функция μ определена на борелевских множествах $E \subset \mathbb{R}_0^n$ за исключением тех E, для которых $\mu_1(E) = \mu_2(E)$.

Теорема 1. (С.М [4]). Всякий элемент $\mu \in \mathfrak{M}_1$ эквивалентен разности $\mu_1 - \mu_2$, где где μ_1 и μ_2 – положительные взаимно сингулярные локально конечные борелевские меры на $\mathbb{R}_0^n$. Причем μ_1 и μ_2 определяются однозначно.

Вещественной радоновой мерой на $\mathbb{R}_0^n$ называется класс эквивалентных элементов из множества $\mathfrak{M}_1$. Множество таких мер обозначим $\mathfrak{R}$.

Из теоремы 1 легко следует, что множество $\mathfrak{R}$ является вещественным линейным пространством. Проверить это свойство, исходя из определении $\mathfrak{R}$, достаточно затруднительно.

Мы будем рассматривать также комплексные меры Радона. Это функции множеств вида $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, где μ_1 , μ_2 – вещественные радоновые меры. Ограничение меры μ на множество E определяется по формуле $\mu_E = (\mu_1)_E + i(\mu_2)_E$. Комплексная мера Радона μ сосредоточена на множестве E, если выполняется равенство $\mu = \mu_E$.

Обозначим через $\mathfrak{R}_C$ – это множество комплексных радоновых мер на $\mathbb{R}_0^n$. Отметим, что $\mathfrak{R}_C$ является комплексным линейным пространством. В пространстве $\mathfrak{R}_C$ вводится понятие широкой сходимости. Говорят, что последовательность радоновых мер μ_m широко сходится к радоновой мере μ , если для любой функции $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}_0^n)$ числовая последовательность $\mu_m(\varphi)$ сходится к $\mu(\varphi)$. Обозначение $\mu = \lim_{m\to\infty} \mu_m$.

Вводятся некоторые понятия множеств, связанные с пространством $\mathfrak{R}_C$.

Множество $E \subset \mathfrak{R}_C$ называется широко ограниченным, если для любой функции $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}_0^n)$ выполняется неравенство $\sup_{\mu\in E}|\mu(\varphi)| < \infty$.

Множество $E \subset \mathfrak{R}_C$ называется сильным ограниченным, если для любого компакта $K \subset \mathbb{R}_0^n$ выполняется неравенство $\sup_{\mu\in E}|\mu|(K) < \infty$.

Множество $E \subset \Re_C$ называется компактным, если из любой последовательности $\mu_m \subset E$ можно извлечь широко сходящуюся подпоследовательность.

Компактный множество в $\Re_C$, содержащее пределы широко сходящихся последовательностей элементов этого множества, называется компактом.

Теорема 2. Всякая широко ограниченное множество в $\Re_C$ является сильно ограниченным множеством.

Доказательство.

Предположим противное. Тогда существует множество $E \subset \Re_C$, которое является широко ограниченным, но не является сильным ограниченным. Тогда существует компакт K и последовательность радоновых мер $\mu_m \in E$ такие, что

$$|\mu_m|(K) \geq 4^m + 2 .$$

Из (3.3) и из равенства $|\mu_m|(K) = \|\mu_m\|$, если μ_m рассматривать как линейный функционал на пространстве $C(K)$, следует, что существует функция $\psi_m \in C(K)$ такая, что $\|\psi_m\| = 1$,

$$\left| \int_K \psi_m(t) d\mu_m(t) \right| \geq 4^m + 1 .$$

Пусть K_δ – δ-окрестность компакта K. Из теоремы Урысона следует, что сущест-вует непрерывная функция φ_m в пространстве $\square^n$ такая, что $\|\varphi_m\| = 1$, для которой выпол-няется соотношение

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} \psi_m(x) \ , & x \in K \\ \quad 0 \ , & x \,\bar{\in}\, K_\delta . \end{cases}$$

Выбирая δ достаточно малым получим, что $\varphi_m \in \Phi$ и что выполняется неравенство

$$\left| \int_{K_\delta} \varphi_m(t) \, d\mu_m(t) \right| \geq 4^m .$$

Если $h_m(t) = \dfrac{1}{2^m} \varphi_m(t)$, то $\|h_m\| = 2^{-m}$,

$$\left| \int_{K_\delta} h_m(t) \, d\mu_m(t) \right| \geq 2^m . \qquad (1)$$

Рассмотрим банахово пространство $C_0(K_\delta)$, состоящее из комплексных непрерывных функций f на компакте K_δ, обращающихся в ноль на границе компакта, $\|f\| = \max|f(t)|$. Будем считать функции определёнными на $\square_0^n$ и равны нулю вне компакта K_δ.

Поскольку множество E является широко ограниченными, то для любой функции $f \in C_0(K_\delta)$ множество $\{ (\mu, f) : \mu \in E \}$ является ограниченными. Рассмотрим семейство операторов $J_\mu : C_0(K_\delta) \to \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел, $\mu \in E$, $J_\mu(f) = (f, \mu)$. Это семейство ограничено в каждой точке $f \in C_0(K_\delta)$. По теореме Банаха-Штейнгауза о равномерной ограниченности существует константа M такая, что $\|J_\mu\| \le M$ для любой меры $\mu \in E$. Это неравенство противоречит неравенству (1). Теорема доказана.

Список литературы

1. Kadets, V.M. (2006), A course of Functional Analysis, Kharkov National University.
2. Van Quynh Nguyen (2015), Various Types of Convergence of Sequences of Subharmonic Functions, Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom,Volume 11, Number 1, 63–74.
3. Nguyen Van Quynh, Theorem on uniform continuity of Logarithmic potential, Visnyk of science and education, Issue 5 (59), 6-10p.
4. Nguyen Van Quynh, Le Anh Thang (2021), THEOREM ON THE REPRESENTATION MEASURES "Мировая наука" №3 (48) 2021.