Давлатов Ш.О. Доцент.
Университет экономики и педагогики
Узбекистан, г.Карши

ОТЫСКАНИЯ НЕТРИВИАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ САЛЕМА

Аннотация. Эта статья посвящена исследованию нетривиального решения интегрального уравнения Салема. Для отыскания нетривиального решения интегрального уравнения рассмотрены все возможные случаи. И во всех случаях показано, что интегральное уравнение имеет только тривиальное решение.

Ключевые слова. Последовательность, уравнения Салема, нетривиальное решение, гипотеза Римана.

Davlatov Sh.O.
University of Economic and Pedagogy
Uzbekistan, Karshi

Abstract. This article is devoted to the study of a nontrivial solution of the Salem integral equation. All possible cases are considered to find a nontrivial solution to the integral equation. And in all cases, it is shown that the integral equation has only a trivial solution.

Keywords. Sequence, Salem equations, nontrivial solution, Riemann hypothesis.

Теорема. Гипотеза Римана истинна тогда и только тогда, когда интегральное уравнение или функция от x

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sigma y} f(y)dy}{e^{e^{x-y}}+1} = 0 \tag{1}$$

среди ограниченных и измеримых функций имеет только тривиальное решение $f(y)$ для $0<\sigma<1$, $x \in R$.

Покажем, что среди ограниченных и измеримых функций интегральное уравнение (1) имеет только тривиальное решение $f(y)$.

В интеграле (1) сделаем замену переменных $z = e^{-y}, \tau = e^{x};\ \tau, z \in (0, +\infty)$. После замены интеграл (1) имеет вид:

$$\int_0^{-\infty} \frac{z^{\sigma-1}\varphi(z)dz}{e^{\tau z}+1} = 0 \qquad (2)$$

Выберем произвольное значение $\sigma = \sigma_0 \in (0,1)$. Тогда

$$\int_0^{-\infty} \frac{\varphi(z)dz}{z^{1-\sigma_0}(e^{\tau z}+1)} = 0 \quad \forall \tau \in (0, +\infty). \qquad (3)$$

Докажем, что интегральное уравнение (3) не имеет нетривиальных решений.

I. Возьмем ограниченную, измеримую функцию $\phi(z) > 0$ заданной почти всюду на $[a,c]$ и удовлетворяющей условию

$$\int_{[a,b]} \phi(z)dz = \int_{[b,c]} \phi(z)dz,\ b \in (a,c).$$

Покажем, что при любых $\tau > 0$

$$\int_{[a,b]} \frac{\phi(z)dz}{z^{1-\sigma_0}(e^{\tau z}+1)} > \int_{[b,c]} \frac{\phi(z)dz}{z^{1-\sigma_0}(e^{\tau z}+1)}$$

где $0 \le a < b < c;\ a,b,c \in R$.

Действительно, из неравенство

$$\frac{1}{z^{1-\sigma_0}(e^{\tau z}+1)} > \frac{1}{x^{1-\sigma_0}(e^{\tau x}+1)},\ \forall z \in (a,b), \forall x \in (b,c)$$

следует, что

$$\int_{[a,b]} \frac{\phi(z)dz}{z^{1-\sigma_0}(e^{\tau z}+1)} > \int_{[b,c]} \frac{\phi(z)dz}{z^{1-\sigma_0}(e^{\tau z}+1)}.$$

II. Рассмотрим теперь ограниченную, измеримую функцию $\phi(z)$ заданная почти всюду на $[a,c]$ и удовлетворяющая условии:

1. $\phi(z) > 0$ почти всюду на $[a,b]$,
2. $\phi(z) < 0$ почти всюду на $[b,c]$,
3. $\displaystyle\int_{[a,b]} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{z}+1)}dz < \int_{[b,c]} \frac{|\phi(z)|}{z^{1-\sigma_0}(e^{z}+1)}dz$,

где $0 \le a < b < c;\ a,b,c \in R$.

Построим функцию

$$\Phi(x,\tau) = \int_{[a,x]} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{\tau z}+1)}dz,$$

где $a \le x \le c$; $\tau > 0;\ \tau \in R$. Очевидно, что $\Phi(x,\tau)$ непрерывная функция,

$$\Phi(b,\tau) = \int\limits_{[a,b]} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{\tau z}+1)} dz > 0.$$

Из 3-го условия следует, что

$$\Phi(c,1) = \int\limits_{[a,b]} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{z}+1)} dz - \int\limits_{[b,c]} \frac{|\phi(z)|}{z^{1-\sigma_0}(e^{z}+1)} dz < 0$$

Очевидно, что для любых $z_1, z_2 \in R,\ z_1 < z_2$ верны соотношения

$$e^{z_1\tau} < e^{z_2\tau},\ 1 < e^{(z_2 - z_1)\tau}, \lim_{\tau\to\infty} e^{(z_2 - z_1)\tau} = \infty,$$

$$\frac{1}{e^{\tau z_1}+1} > \frac{1}{e^{\tau z_2}+1},$$

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{e^{\tau z_2}+1}{e^{\tau z_1}+1} = \infty.$$

Из этого следует, что ростом τ, начиная с некоторого значения $\tau = \tau_1 > 1$, функция $\Phi(c,\tau)$ начинает возрастать. Следовательно существует точка $\tau = \tau_0 > 1$ такое, что $\Phi(c,\tau_0) = 0$. Очевидно, что и для всех $\tau > \tau_0$ функция $\Phi(c,\tau) > 0$. Это означает, что существует точка $\tau = \tau_* > \tau_0$ такое, что функция $\Phi(c,\tau)$ достигает максимум в этой точке, поскольку $\lim\limits_{\tau\to\infty} \Phi(c,\tau) = 0$.

III. Аналогичное рассуждение ведется для ограниченной, измеримой функции $\phi(z)$ заданная почти всюду на $[a,c]$ и удовлетворяющая условии:

1. $\phi(z) < 0$ почти всюду на $[a,b]$,
2. $\varphi(z) > 0$ почти всюду на $[b,c]$,
3. $-\int\limits_{[a,b]} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{z}+1)} dz < \int\limits_{[b,c]} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{z}+1)} dz$,

где $0 \le a < b < c;\ a,b,c \in R$.

Аналогично, построим функцию

$$\Phi(x,\tau) = \int\limits_{[a,x]} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{\tau z}+1)} dz,$$

где $a \le x \le c$; $\tau > 0;\ \tau \in R$. Очевидно, что $\Phi(x,\tau)$ непрерывная функция,

$$\Phi(b,\tau) = \int\limits_{[a,b]} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{\tau z}+1)} dz < 0.$$

Из 3-го условия следует, что

$$\Phi(c,1)=\int\limits_{[a,b]}\frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^z+1)}dz+\int\limits_{[b,c]}\frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^z+1)}dz>0,$$

Следовательно, ростом τ, начиная с некоторого значения $\tau=\tau_1>1$ функция $\Phi(c,\tau)$ начинает убывать. Следовательно, существует точка $\tau=\tau_0>1$ такое, что $\Phi(c,\tau_0)=0$. Очевидно, что и для всех $\tau>\tau_0$ функция $\Phi(c,\tau)<0$ и $\lim\limits_{\tau\to\infty}\Phi(c,\tau)=0$. Это означает, что существует точка $\tau=\tau_*>\tau_0$ такое, что функция $\Phi(c,\tau)$ достигает минимум в этой точке.

IV. Пусть $\phi(z)$ ограниченная, измеримая функция заданная почти всюду на $(0,+\infty)$ и удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{(0,-\infty)}\frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^z+1)}dz=0. \tag{4}$$

Рассмотрим функцию

$$F(x,\tau)=\int\limits_{(x,-\infty)}\frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{\tau z}+1)}dz.$$

Рассмотрим возможные случаи, учитывая, что $\dfrac{1}{z^{1-\sigma_0}(e^{\tau z}+1)}$ убывающая, положительная функция. Покажем, что во всех случаях функция $F(0,\tau)$ имеет, по крайней мере, одну экстремальную точку. Все условия в этих случаях обеспечивают возможность появления хотя бы одного экстремума функции $F(0,\tau)$.

1-случай. Пусть интеграл $F(0,\tau)$ представлен в виде конечной суммы интегралов

$$F(0,\tau)=\int\limits_{(0,-\infty)}\frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{\tau z}+1)}dz=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{A_i}\frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{\tau z}+1)}dz+\int\limits_{(a,-\infty)}\frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{\tau z}+1)}dz,$$

где

$$\Phi_i(\tau)=\int\limits_{A_i}\frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{\tau z}+1)}dz\neq 0,\ \bigcup_{i=1}^{n}A_i=(0,a),\ A_i\cap A_j=\varnothing, i\neq j,$$

функция $\phi(z)$ знака постоянно на $A_i,\ i=\overline{1,n}$. Интегралы $\Phi_i(\tau),\ i=\overline{1,n}$ знака чередующие, упорядоченные по интервалу интегрирования.

Пусть $\Phi_1(\tau)>0$. Рассмотрим случай

1. Если n - четный

$$\Phi_{2i-1}(1)\le-\Phi_{2i}(1), i=1,\dots,\left[\frac{n}{2}\right]-1, \Phi_{n-1}(1)\ge-\Phi_n(1).$$

2. Если n - нечетный

$$\Phi_{2i-1}(1) \le -\Phi_{2i}(1), i = 1, \dots, \left[\frac{n}{2}\right], \Phi_n(1) > 0$$
.

В этом случае из **II.** следует, что существует точка $\tau = \tau_1 > 1$ такое, что

$$\Phi_{2i-1}(\tau_1) \ge -\Phi_{2i}(\tau_1), \ \forall i$$
.

Откуда

$$\int_{(0,a)} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{\tau z}+1)} dz > 0, \quad \forall \tau \ge \tau_1 \ge 1$$
.

Следовательно, из **II.** следует, что существует точка $\tau = \tau_0 \ge \tau_1$ такое, что $F(0,\tau_0) > 0$. Откуда следует, существование точки $\tau = \tau_*$, в которой функция $F(0,\tau)$ достигает максимум, так как $\lim_{\tau \to -\infty} F(0,\tau) = 0$.

Пусть теперь $\Phi_1(\tau) < 0$. Рассмотрим случай

1. Если n - четный

$$-\Phi_{2i-1}(1) \le \Phi_{2i}(1), i = 1, \dots, \left[\frac{n}{2}\right] - 1, -\Phi_{n-1}(1) \ge \Phi_n(1)$$
.

2. Если n - нечетный

$$-\Phi_{2i-1}(1) \le \Phi_{2i}(1), i = 1, \dots, \left[\frac{n}{2}\right], \Phi_n(1) < 0$$
.

В этом случае из **III.** следует, что существует точка $\tau = \tau_1 > 1$ такое, что

$$-\Phi_{2i-1}(\tau_1) \ge \Phi_{2i}(\tau_1), \ \forall i$$
.

Откуда

$$\int_{(0,a)} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{\tau z}+1)} dz < 0, \quad \forall \tau \ge \tau_1 \ge 1$$
.

Следовательно, из **III.** следует, что существует точка $\tau = \tau_0 \ge \tau_1$ такое, что $F(0,\tau_0) < 0$. Откуда следует, существование точки $\tau = \tau_*$, в которой функция $F(0,\tau)$ достигает минимум, так как $\lim_{\tau \to -\infty} F(0,\tau) = 0$.

В остальных случаях, очевидно, что функция $F(0,\tau)$ имеет, хотя бы одну экстремальную точку.

2-случай. Пусть существует последовательность точек $\{x_n\}, x_n > a, n = 1,2,3,\dots$, сходящейся к точке a справа, т.е. $\lim_{\substack{n\to\infty \\ x_n > a}} x_n = a$. Эти точки, разбивают отрезок $[a, x_1]$ на отрезки. В этих отрезках функция $\phi(z)$ знака постоянна. $\phi(z) = 0$ почти всюду на $(0,a)$, в частности $a = 0$.

Пусть

$$\Phi_i(\tau) = \int_{(x_{i-1}, x_i)} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{\tau z}+1)} dz \ne 0, \ i = 1,2,3,\dots$$
,

знака чередующие интегралы и

$$\int\limits_{(0,x_1)} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^z+1)}dz \neq 0.$$

В этом случае интеграл $F(0,\tau)$ можно представить в виде бесконечной суммы интегралов т.е.

$$F(0,\tau) = \int\limits_{(0,-\infty)} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{\tau z}+1)}dz = \sum_{i=1}^{\infty}\Phi_i(\tau) + \int\limits_{(x_1,-\infty)} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{\tau z}+1)}dz.$$

Пусть

$$\int\limits_{(0,x_1)} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^z+1)}dz > 0,$$

тогда из (4) следует

$$F(x_1,1) = \int\limits_{(x_1,-\infty)} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^z+1)}dz < 0.$$

Не нарушая обычности можно считать, что $\Phi_1(1) > 0$

Пусть среди интегралов $\Phi_i(1),\ i=1,2,3,...$ имеются интегралы удовлетворяющие условие

$$0 < \Phi_{2i_k-1}(1) \le -\Phi_{2i_k}(1),\ i_k > 0,\ k=1,2,3...$$

Тогда из **II.** следует, что существует точка $\tau=\tau_1>1$ такое, что

$$\Phi_{2i_k-1}(\tau_1)+\Phi_{2i_k}(\tau_1) \ge \Phi_{2i_k-1}(1)+\Phi_{2i_k}(1)$$

или

$$\Phi_{2i_k-1}(\tau_1)+\Phi_{2i_k}(\tau_1) \ge 0, \quad k=1,2,3...$$

Вообще та

$$\Phi_{2i-1}(\tau_1)+\Phi_{2i}(\tau_1) \ge \Phi_{2i-1}(1)+\Phi_{2i}(1)$$

или

$$\Phi_{2i-1}(\tau_1)+\Phi_{2i}(\tau_1) \ge 0, \quad i=1,2,3...$$

$$\Phi_1(\tau_1)+F(x_1,\tau_1) \ge \Phi_1(1)+F(x_1,1)$$

или

$$\Phi_1(\tau_1)+F(x_1,\tau_1) \ge 0.$$

Откуда $\int\limits_{(0,x_1)} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{\tau_1 z}+1)}dz > \int\limits_{(0,x_1)} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^z+1)}dz, \quad \tau_1 \ge 1$,

Следовательно $F(0,\tau_1) > F(0,1) = 0$. Откуда следует, существование точки $\tau=\tau_* \ge \tau_1$, в которой функция $F(0,\tau)$ достигает максимум, так как $\lim\limits_{\tau\to-\infty} F(0,\tau)=0$.

Аналогично, пусть

$$\int\limits_{(0,x_1)} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^z+1)}dz < 0$$
,

тогда из (4) следует

$$\int\limits_{(x_1,-\infty)} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^z+1)}dz > 0$$
.

Не нарушая обычности можно считать, что $\Phi_1(1) < 0$. Пусть среди интегралов $\Phi_i(1),\ i = 1,2,3....$ имеются интегралы удовлетворяющие условие

$$0 < -\Phi_{2i_k-1}(1) \le \Phi_{2i_k}(1),\ i_k > 0,\ k = 1,2,3...$$
.

Тогда из **III.** следует, что существует точка $\tau = \tau_1 > 1$ такое, что

$$\Phi_{2i_k-1}(\tau_1) + \Phi_{2i_k}(\tau_1) \le \Phi_{2i_k-1}(1) + \Phi_{2i_k}(1)$$

или

$$\Phi_{2i_k-1}(\tau_1) + \Phi_{2i_k}(\tau_1) \le 0, \quad k = 1,2,3...$$
.

Вообще та

$$\Phi_{2i-1}(\tau_1) + \Phi_{2i}(\tau_1) \le \Phi_{2i-1}(1) + \Phi_{2i}(1)$$

или

$$\Phi_{2i-1}(\tau_1) + \Phi_{2i}(\tau_1) \le 0, \quad i = 1,2,3...$$
.

$$\Phi_1(\tau_1) + F(x_1,\tau_1) \le \Phi_1(1) + F(x_1,1)$$

или

$$\Phi_1(\tau_1) + F(x_1,\tau_1) \le 0$$
.

Откуда

$$\int\limits_{(0,x_1)} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{\tau_1 z}+1)}dz < \int\limits_{(0,x_1)} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^z+1)}dz < 0, \quad \tau_1 \ge 1$$
.

Следовательно $F(0,\tau_1) < F(0,1) = 0$. Откуда следует, существование точки $\tau = \tau_* \ge \tau_1$, в которой функция $F(0,\tau)$ достигает минимум, так как $\lim\limits_{\tau\to-\infty} F(0,\tau) = 0$.

Пусть существует две последовательности точек $\{x_n\},\ x_n > a,\ n = 1,2,3,...$, $\{y_k\},\ y_k > b,\ k = 1,2,3,...$ сходящейся к точкам a, b справа соответственна, т.е. $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ x_n > a}} x_n = a$, $\lim\limits_{\substack{k\to\infty \\ y_k > b}} y_k = b$. $a < b$, для всех n, $x_n \le b$. Эти точки последовательностей , разбивают отрезок $[a, y_1]$ на отрезки. В этих отрезках функция $\phi(z)$ знака постоянна. $\phi(z) = 0$ почти всюду на $(0,a)$, в частности $a = 0$.

Пусть

$$\Phi_i(\tau) = \int\limits_{(x_{i-1},x_i)} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{\tau z}+1)} dz \neq 0, \ i = 1,2,3,...$$
,
$$\Psi_j(\tau) = \int\limits_{(y_{j-1},y_j)} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{\tau z}+1)} dz \neq 0, \ j = 1,2,3,...$$
знака чередующие интегралы и не нарушая обычности можно считать, что
$$\int\limits_{(0,y_1)} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{z}+1)} dz \neq 0.$$

В этом случае интеграл $F(0,\tau)$ можно представить в виде бесконечной суммы интегралов т.е.
$$F(0,\tau) = \int\limits_{(0,-\infty)} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{\tau z}+1)} dz = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(\tau) + \sum_{j=1}^{\infty} \Psi_j(\tau) + \int\limits_{(x_1,-\infty)} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{\tau z}+1)} dz.$$

Пусть
$$\int\limits_{(0,y_1)} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{z}+1)} dz > 0,$$
тогда из (4) следует
$$F(y_1,1) = \int\limits_{(y_1,-\infty)} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{z}+1)} dz < 0.$$

Не нарушая обычности можно считать, что $\Psi_1(1) > 0$

В этом случае из **II.** следует, что существует точка $\tau = \tau_1 > 1$ такое, что
$$\Psi_{2j-1}(\tau_1) + \Psi_{2j}(\tau_1) \geq \Psi_{2j-1}(1) + \Psi_{2j}(1)$$
или
$$\Psi_{2j-1}(\tau_1) + \Psi_{2j}(\tau_1) \geq 0, \ j = 1,2,3...$$

Если $\Phi_1(1) > 0$,
$$\Phi_{2i-1}(\tau_1) + \Phi_{2i}(\tau_1) \geq \Phi_{2i-1}(1) + \Phi_{2i}(1)$$
или
$$\Phi_{2i-1}(\tau_1) + \Phi_{2i}(\tau_1) \geq 0, \quad i = 1,2,3...$$

А если $\Phi_1(1) < 0$,
$$\Phi_{2i}(\tau_1) + \Phi_{2i-1}(\tau_1) \geq \Phi_{2i}(1) + \Phi_{2i-1}(1), \ i = 1,2,3...$$
или
$$\Phi_{2i}(\tau_1) + \Phi_{2i-1}(\tau_1) \geq 0, \quad i = 1,2,3...$$

$$\Psi_1(\tau_1) + F(y_1,\tau_1) \geq \Psi_1(1) + F(y_1,1)$$
или
$$\Psi_1(\tau_1) + F(y_1,\tau_1) \geq 0.$$
Откуда

$$\int\limits_{(0,y_1)} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{\tau_1 z}+1)}dz > \int\limits_{(0,y_1)} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{z}+1)}dz, \quad \tau_1 \geq 1,$$

Следовательно $F(0,\tau_1) > F(0,1) = 0$. Откуда следует, существование точки $\tau = \tau_* \geq \tau_1$, в которой функция $F(0,\tau)$ достигает максимум, так как $\lim\limits_{\tau\to+\infty} F(0,\tau) = 0$.

Аналогично рассматривается случай

$$\int\limits_{(0,y_1)} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{z}+1)}dz < 0.$$

В этом случае, аналогично рассуждая можно показать, существование точки $\tau = \tau_* \geq \tau_1$, в которой функция $F(0,\tau)$ достигает минимум.

Остальные этому подобные случаи, рассматриваются аналогично.

3-случай. Пусть интеграл $F(0,\tau)$ представлен в виде бесконечной суммы интегралов

$$F(0,\tau) = \int\limits_{(0,+\infty)} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{\tau z}+1)}dz = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{A_i} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{\tau z}+1)}dz, \tag{5}$$

где

$$\Phi_i(\tau) = \int\limits_{A_i} \frac{\phi(z)}{z^{1-\sigma_0}(e^{\tau z}+1)}dz \neq 0, \ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = (0,+\infty), \ A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$$

$\phi(z)$ знака постоянно на A_i, $i = 1,2,3,\ldots$. $\Phi_i(\tau)$, $i = 1,2,3,\ldots$ знака чередующие интегралы, упорядоченные по интервалу интегрирования.

Пусть $\Phi_1(\tau) > 0$. Из условия (4) следует, что среди интегралов $\Phi_i(\tau)$, $i = 1,2,3,\ldots$ имеются интегралы удовлетворяющие условие

$$\Phi_{2i_k-1}(1) \leq -\Phi_{2i_k}(1), \ k = 1,2,3\ldots.$$

Тогда из **II.** следует, что существует точка $\tau = \tau_1 > 1$ такое, что

$$\Phi_{2i_k-1}(\tau_1) > -\Phi_{2i_k}(\tau_1), \ k = 1,2,3\ldots.$$

Следовательно, $F(0,\tau_1) > 0$. Откуда следует, существование точки $\tau = \tau_*$, в которой функция $F(0,\tau)$ достигает максимум, поскольку $\lim\limits_{\tau\to+\infty} F(0,\tau) = 0$.

Пусть теперь $\Phi_1(\tau) < 0$. Аналогично, из условия (4) следует, что среди интегралов $\Phi_i(\tau)$, $i = 1,2,3,\ldots$ имеются интегралы удовлетворяющие условие

$$-\Phi_{2i_k-1}(1) \leq \Phi_{2i_k}(1), \ k = 1,2,3\ldots.$$

Из **III.** следует, что существует точка $\tau = \tau_1 > 1$ такое, что

$$-\Phi_{2i_k-1}(\tau_1) > \Phi_{2i_k}(\tau_1), \ k = 1,2,3\ldots.$$

Следовательно, $F(0,\tau_1)<0$. Откуда следует, существование точки $\tau=\tau_*$, в которой функция $F(0,\tau)$ достигает минимум, поскольку $\lim_{\tau\to-\infty} F(0,\tau)=0$.

Из этих фактов следует, что функция $F(0,\tau)$ принимает различные значения при различных значениях τ.

Из выше изложенных следует, что в среди ограниченных измеримых функций $\varphi(z)$ интегральное уравнение (2) имеет только тривиальное решение. Следовательно, $f(y)\equiv 0$ почти всюду в R.

Литературы.

1. Bombieri, Enrico. The Riemann Hypothesis -- official problem description. 2000. Clay Mathematics Institute.
2. Broughan K. Equivalents of the Riemann Hypothesis. 2018. Volume 2, Cambridge university:Press.