УДК 517.518.14

Нгуен Ван Куинь

Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель

Факультета фундаментальной науки,

университет Ханой промышленности, Ha Noi, Вьетнам.

E-Mail: nguyenvanquynh@haui.edu.vn.

СВОЙСТВА СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ РАДОНОВЫХ МЕР

Аннотация: *Теория меры играет важную роль в теории субгармонических и* δ*-субгармонических функций. Классические свойства меры были представлены во многих монографиях, например в [1]. В статье представляется усиление варианта Азарина теоремы об компактном множестве в пространстве радоновых мер. Результаты нашей статьи позволяют несколько упростить конструкции из этих работ.*

Ключевые слова: *мера Хана, мера Жордана, сингулярная положительная мера, линейный непрерывный функционал, радоновая мера* .

Nguyen Van Quynh.

PhD in Physics and Mathematics, Lecturer

Faculty of Basic Science, Hanoi University of Industry, Ha Noi, Vietnam

E-Mail: nguyenvanquynh@haui.edu.vn.

PROPERTIES OF THE CONVERGENCE OF THE SEQUENCES OF RADON MEASURES

Abstract: *Measure theory plays an important role in the theory of subharmonic and* δ*-subharmonic functions. The classical properties of a measure have been presented in many monographs, for example, in [1]. In the article we sharpen Azarin's variant of the theorem on a compact set in the space of Radon measures. The results of our article allow us to simplify the constructions from these articles somewhat.*

Key words: *Hahn measure, Jordan measure, singular positive measure, linear continuous functional; Radon measures, compact set.*

Сначала вводим некоторые обозначения:

$\mathbb{R}_0^n = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$; $C(z_0, r) = \{z: \|z - z_0\| < r\}$; $B(z_0, r) = \{z: \|z - z_0\| \leq r\}$.

Ф – это линейное пространство непрерывных финитных функций на $\mathbb{R}_0^n$. Будут рассматриваться как вещественные, так и комплексные пространства Ф.

Напомним теперь некоторые определения и результаты из теории интеграла и меры.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}_0^n$ определена вещественная борелевская мера μ, $E \subset \mathbb{R}_0^n$ – борелевское множество. Ограничением (сужением) меры μ на множество E называется мер μ_E, которая определяется формулой $\mu_E(A) = \mu(A \cap E)$ для любого борелевского мно-жества $A \subset \mathbb{R}_0^n$.

Величина $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$, называется полной вариацией или модулем меры μ.

Вещественная борелевская мера μ на $\mathbb{R}_0^n$ называется локально конечной, если для любого компакта $K \subset \mathbb{R}_0^n$ выполняется неравенство $|\mu|(K) < \infty$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_1$ семейство функций множеств , представимых в виде $\mu = \mu_1 - \mu_2$, где μ_1, μ_2 вещественные локально конечные борелевские меры на $\mathbb{R}_0^n$. функция μ определена на борелевских множествах $E \subset \mathbb{R}_0^n$ за исключением тех E, для которых $\mu_1(E) = \mu_2(E)$.

Теорема 1. (С.М [4]). Всякий элемент $\mu \in \mathfrak{M}_1$ эквивалентен разности $\mu_1 - \mu_2$, где где μ_1 и μ_2 – положительные взаимно сингулярные локально конечные борелевские меры на $\mathbb{R}_0^n$. Причем μ_1 и μ_2 определяются однозначно.

Вещественной радоновой мерой на $\mathbb{R}_0^n$ называется класс эквивалентных элементов из множества $\mathfrak{M}_1$. Множество таких мер обозначим $\mathfrak{R}$.

Из теоремы 1 легко следует, что множество $\mathfrak{R}$ является вещественным линейным пространством. Проверить это свойство, исходя из определении $\mathfrak{R}$, достаточно затруднительно.

Мы будем рассматривать также комплексные меры Радона. Это функции множеств вида $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, где μ_1 , μ_2 – вещественные радоновые меры. Ограничение меры μ на множество E определяется по формуле $\mu_E = (\mu_1)_E + i(\mu_2)_E$. Комплексная мера Радона μ сосредоточена на множестве E, если выполняется равенство $\mu = \mu_E$.

Обозначим через $\mathfrak{R}_C$ – это множество комплексных радоновых мер на $\mathbb{R}_0^n$. Отметим, что $\mathfrak{R}_C$ является комплексным линейным пространством. В пространстве $\mathfrak{R}_C$ вводится понятие широкой сходимости. Говорят, что последовательность радоновых мер μ_m широко сходится к радоновой мере μ , если для любой функции $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}_0^n)$ числовая последовательность $\mu_m(\varphi)$ сходится к $\mu(\varphi)$. Обозначение $\mu = \lim_{m\to\infty} \mu_m$.

Вводятся некоторые понятия множеств, связанные с пространством $\mathfrak{R}_C$.

Множество $E \subset \mathfrak{R}_C$ называется широко ограниченным, если для любой функции $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}_0^n)$ выполняется неравенство $\sup_{\mu\in E}|\mu(\varphi)| < \infty$.

Множество $E \subset \mathfrak{R}_C$ называется сильным ограниченным, если для любого компакта $K \subset \mathbb{R}_0^n$ выполняется неравенство $\sup_{\mu\in E}|\mu|(K) < \infty$.

Множество $E \subset \mathfrak{R}_C$ называется компактным, если из любой последовательности $\mu_m \subset E$ можно извлечь широко сходящуюся подпоследовательность.

Компактный множество в $\mathfrak{R}_C$, содержащее пределы широко сходящихся последовательностей элементов этого множества, называется компактом.

Теорема 2. (СМ. [5]) Всякая широко ограниченное множество в $\mathfrak{R}_C$ является сильно ограниченным множеством.

Для множества положительных мер признак сильной ограниченности можно усилить.

Теорема 3. Пусть E – множество положительных радоновых мер на $\square_0^n$, Φ_1– всюду плотно множество в пространстве $\Phi\left(\square_0^n\right)$. Тогда если множество $\left\{\left|(\mu,\varphi)\right|:\mu\in E\right\}$ ограничено для любой функции $\varphi\in$ Φ_1, то множество E сильно ограничено.

Доказательство. Пусть $K\subset\square_0^n$ – компакт. В множестве Φ_1 найдётся такая функция φ, что будет выполняться неравенство $\chi_K(z)=\varphi(z)$. Пусть $\mu\in E$. Тогда

$$\mu(K)=\int\limits_{\square_0^n}\chi_K(z)d\mu(z)\le\int\limits_{\square_0^n}\varphi(z)d\mu(z)\le\sup\left\{(\mu,\varphi):\mu\in E\right\}.$$

Из этого следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть μ_r, $r\in(0,\infty)$ – сеть радоновых мер и пусть для любой функции φ существует предел (μ_r,φ) при $r\to\infty$. Тогда сеть μ_r широко сходится к некоторой мере ν
при $r\to\infty$.

Доказательство.

Пусть последовательность $t_m>0$ сходится к бесконечности. Из условия теоремы следует, что последовательность μ_{t_m} широко ограничена. По теореме 3.8 у последовательности t_m есть подпоследовательность τ_m такая, что последовательность μ_{τ_m} широко сход-ится к некоторой радоновой мере τ. Докажем, что $\mu_r\to\nu$ при $r\to\infty$. Если это не так, то существуют число $\varepsilon_0>0$, последовательность $r_m\to\infty$ и функция $\varphi\in\Phi\left(\square_0^n\right)$ такие , что $\left|(\mu_{r_m},\varphi)-(\nu,\varphi)\right|\ge\varepsilon_0$. Это неравенство противоречит соотношениям $(\mu_{\tau_m},\varphi)\to(\nu,\varphi)$ и $(\mu_{\tau_m}-\mu_{r_m},\varphi)\to 0$. Теорема доказана.

Теорема 5. Если последовательность $\mu_m=\mu_{1,m}+i\mu_{2,m}$ комплексных радоновых мер является сходящейся, то у неё существует подпоследовательность μ_{m_k}, такая что послед-овательности $\left|\mu_{m_k}\right|$, $\left(\mu_{1,m_k}\right)_\pm$, $\left(\mu_{2,m_k}\right)_\pm$ будут сходящимися.

Доказательство. Из того, что последовательность μ_m сходится, следует, что она является широко ограниченной. По теореме 3 она будет сильно ограниченной. Значит сильно ограниченными будут последовательности $\left|\mu_{m_k}\right|$, $\left(\mu_{1,m_k}\right)_\pm$, $\left(\mu_{2,m_k}\right)_\pm$. Тогда по теор-еме 3.8 эти последовательности будут компактными. Из этого легко следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Пусть μ – радонова мера, E – борелевское множество. Множество E называется измеримым по Жордану относительно меры μ, если $|\mu|(\partial E)=0$. Из теоремы $0.5'$ [5] вытекает следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть последовательность комплексных радоновых мер $\mu_m=\mu_{1,m}+\mu_{2,m}$ сходится к мере μ и пусть существует предел $\hat{\mu}=\lim\limits_{m\to\infty}|\mu_m|$. Пусть борелевское множество E измеримо по Жордану относительно $\hat{\mu}$. Тогда

$$\lim_{m\to\infty}(\mu_m)_E=\mu_E.$$

Заметим, что теорема 3 сформулируется для положительных мер. Применение теорема 3 к мерам $(\mu_{1,m})_\pm$, $(\mu_{2,m})_\pm$ приводит к доказательству нашей теоремы.

Пусть μ_m – последовательность борелевских мер на компакте W. Говорят, что после-довательность μ_m слабо сходится к мере μ, если для любой функции $f\in C(W)$

$$\lim_{m\to\infty}\int_W f(x)d\mu_m(x)=\int_W f(x)d\mu(x). \tag{3.5}$$

Теорема 7. Пусть последовательность комплексных радоновских мер μ_m на $\mathbb{R}_0^n$ широко сходится к радоновской мере μ и пусть существует предел $\hat{\mu}=\lim\limits_{m\to\infty}|\mu_m|$. Пусть компакт K измерим по Жордану относительно меры $\hat{\mu}$. Тогда последовательность $(\mu_m)_K$ слабо сходится к μ_K.

Доказательство.

По теореме 3.11 последовательность $(\mu_m)_K$ широко сходится к мере μ_K. Пусть $f\in C(K)$ произвольная функция. Из теоремы Урысона следует, что функцию f можно продолжить до непрерывной финитной функции на $\mathbb{R}_0^n$. Продолженную функцию мы также будим обозначать f. Тогда

$$\lim_{m\to\infty}\int_K f(x)d(\mu_m)_K(x)=\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}_0^n} f(x)d(\mu_m)_K(x)=\int_{\mathbb{R}_0^n} f(x)d\mu_K(x)=\int_K f(x)d\mu_K(x).$$

Теорема доказана.

Сформулируем в виде отдельной теоремы такое следствие теоремы 7.

Теорема 8. Пусть последовательность комплексных радоновских мер μ_m на $\mathbb{R}_0^n$ широко сходится к радоновской мере μ и пусть существует предел $\hat{\mu}=\lim\limits_{m\to\infty}|\mu_m|$. Пусть компакт $K\subset\mathbb{R}_0^n$ измерим по Жордану относительно меры $\hat{\mu}$. Тогда

$$\lim_{m\to\infty}\mu_m(K)=\mu(K).$$

Доказательство. Если в равенстве (3.6) взять $f(x)\equiv 1$, то получили утверждение теоремы. Теорема доказана.

Теорема 9. Если μ_k – компактная последовательность в $\mathfrak{R}_C$ и $d(\mu_k, \mu) \to 0$, то μ_k широко сходится к μ.

Доказательство. Если утверждение теоремы неверно, то существует функция $\varphi \in \Phi$ и две подпоследовательности $\mu_{k_p^{(1)}}$, $\mu_{k_p^{(2)}}$последовательности μ_k такие, что

$$\lim_{p\to 0}\left(\mu_{k_p^{(1)}}, \varphi\right) \neq \lim_{p\to 0}\left(\mu_{k_p^{(2)}}, \varphi\right).$$

Пусть $\nu_p = \mu_{k_p^{(1)}} - \mu_{k_p^{(2)}}$, а φ_m – та последовательность функций из Φ, которая определяет метрику d. Поскольку φ_m всюду плотная последовательность в Φ, то существует подпоследовательность ψ_m последовательности φ_m, которая сходится к φ в пространстве Φ. Существует компакт $W \in \mathbb{R}_0^n$, такой что $\operatorname{supp} \psi_m \subset W$ для любого m. Поэтому с некоторой константой M, не зависящей от m, выполняется неравенство $\overline{\lim_{p\to\infty}} \left|\nu_p(\varphi)\right| \leq M\|\varphi - \psi_m\|$. Из этого следует, что $\nu_p(\varphi) \to 0$. Это противоречит выбору φ. Теорема доказана.

Список литературы

1. Kadets, V.M. (2006), A course of Functional Analysis, Kharkov National University.
2. Van Quynh Nguyen (2015), Various Types of Convergence of Sequences of Subharmonic Functions, Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom,Volume 11, Number 1, 63–74.
3. Nguyen Van Quynh, Theorem on uniform continuity of Logarithmic potential, Visnyk of science and education, Issue 5 (59), 6-10p.
4. Nguyen Van Quynh, Le Anh Thang (2021), THEOREM ON THE REPRESENTATION MEASURES "Мировая наука" №3 (48) 2021.
5. Nguyen Van Quynh, Le Anh Thang (2021), THEOREM ON A COMPACT SET IN THE SPACE OF RADON MEASURES "Мировая наука" №11 (56) 2021.