

УДК 517.518.14

Нгуен Ван Куинь

Кандидат физико-математических наук, старший преподаватель

Факультета фундаментальной науки,

университет Ханой промышленности, Ha Noi, Вьетнам.

E-Mail: [nguyenvanquynh@hau.edu.vn](mailto:nguyenvanquynh@hau.edu.vn).

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕР,  
ПРЕДЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА АЗАРИНА.**

*Аннотация:* Теория предельных множеств Азарина играет важную роль в теории субгармонических и  $\delta$ -субгармонических функций. Классические свойства меры были представлены во многих монографиях, например в [1]. В статье представляется усиление варианта Азарина теоремы об компактном множестве в пространстве радоновых мер. Результаты нашей статьи позволяют несколько упростить конструкции из этих работ.

**Ключевые слова:** мера Хана, мера Жордана, сингулярная положительная мера, линейный непрерывный функционал, радоновая мера .

**Nguyen Van Quynh.**

**PhD in Physics and Mathematics, Lecturer**

**Faculty of Basic Science, Hanoi University of Industry, Ha Noi, Vietnam**

**E-Mail: [nguyenvanquynh@hau.edu.vn](mailto:nguyenvanquynh@hau.edu.vn).**

**ASYMPTOTIC CHARACTERISTICS OF MEASURES,  
LIMIT AZARIN SETS.**

**Abstract:** Azarin's theory of limit sets plays an important role in the theory of subharmonic and  $\delta$ -subharmonic functions. The classical properties of a measure have been presented in many monographs, for example, in [1]. In the article we sharpen Azarin's variant of the theorem on a compact set in the space of Radon

measures. The results of our article allow us to simplify the constructions from these articles somewhat.

**Key words:** Hahn measure, Jordan measure, singular positive measure, linear continuous functional; Radon measures, compact set.

Пусть  $\rho(t)$  – некоторый уточнённый порядок. На пространстве  $\mathfrak{R}_C$  определяется одно-параметрическое семейство преобразований Азарина  $A_t : \mathfrak{R}_C \rightarrow \mathfrak{R}_C, t \in (0, \infty)$ , согласно формулам

$$\mu_t = A_t \mu, \quad \mu_t(E) = \frac{\mu(tE)}{V(t)},$$

Для любого борелевского множества  $E$ .

Пусть  $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}_0^n)$ . Формула переменных даёт

$$\int_{\mathbb{R}_0^n} \varphi(x) d\mu_t(x) = \frac{1}{V(t)} \int_{\mathbb{R}_0^n} \varphi\left(\frac{x}{t}\right) d\mu(t). \quad (4.1)$$

Пусть множество  $\left\{ \nu \in \mathfrak{R}_C : \nu = \lim_{m \rightarrow \infty} A_{t_m} \mu, \lim_{m \rightarrow \infty} t_m = +\infty \right\}$  будем называть предельным множеством Азарина для меры  $\mu$  и обозначим через  $Fr[\mu]$ .

В случае вещественных радоновых мер наряду с предельным множеством Азарина  $Fr[\mu]$  важными асимптотическими характеристиками меры  $\mu$  являются её верхняя конусная плотность  $\Delta(E)$  и нижняя конусная плотность  $\underline{\Delta}(E)$ , а также верхняя плотность  $N(\alpha, E)$  и нижняя плотность  $\underline{N}(\alpha, E)$ . Пусть  $r_0 > 0$  – некоторое фиксированное число,  $E$  – борелевское подмножество единичной сферы  $S_{n-1}$  в пространстве  $\mathbb{R}_0^n$ ,  $f(r, E) = \mu((r_0, r] \times E)$ . Тогда указанные выше величины определяются следующим образом

$$\begin{aligned} \Delta(E) &= \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{f(r, E)}{V(r)}, & \underline{\Delta}(E) &= \underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{f(r, E)}{V(r)}, \\ N(\alpha, E) &= \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{f(r + \alpha r, E) - f(r, E)}{V(r)}, \\ \underline{N}(\alpha, E) &= \underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{f(r + \alpha r, E) - f(r, E)}{V(r)}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Заметим, что величины  $\Delta(E)$  и  $\underline{\Delta}(E)$  имеет смысл определить только в случае, если уточнённый порядок  $\rho(r)$  таков, что  $\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) > 0$ . Это особенно наглядно для случая положительной меры. В случае  $\rho > 0$  величины  $\Delta(E)$  и  $\underline{\Delta}(E)$  не зависят от выбора числа  $r_0$ .

Заметим, что величины  $N(\alpha, E)$  и  $\underline{N}(\alpha, E)$  не зависят от  $r_0$  для любых уточнённых порядков  $\rho(r)$ . Эти величины имеют смысл рассматривать для любых уточнённых порядков. Эти величины являются важными характеристиками мер, как в случае  $\rho > 0$ , так и в случае  $\rho \leq 0$ .

В общем случае, когда нет связи между мерой  $\mu$  и уточнённым порядком  $\rho(r)$  каждая из четырёх величин является элементом расширенного множества вещественных чисел  $[-\infty, \infty]$ . Обычно величины  $N(\alpha, E)$  и  $\underline{N}(\alpha, E)$  рассматривают как функции на полу-оси  $\alpha \geq 0$ . Однако, иногда удобно считать эти величины функциями на полуоси  $\alpha > -1$ .

Из свойств пределов и уточнённого порядка  $\rho(r)$  вытекают следующие соотношения

$$N(\alpha + \beta, E) \leq N(\alpha, E) + (1 + \alpha)^\rho N\left(\frac{\beta}{1 + \alpha}, E\right), \quad (4.3)$$

$$N(\alpha + \beta, E) \geq N(\alpha, E) + (1 + \alpha)^\rho \underline{N}\left(\frac{\beta}{1 + \alpha}, E\right), \quad (4.4)$$

$$\underline{N}(\alpha + \beta, E) \leq \underline{N}(\alpha, E) + (1 + \alpha)^\rho \underline{N}\left(\frac{\beta}{1 + \alpha}, E\right), \quad (4.5)$$

$$\underline{N}(\alpha + \beta, E) \leq \underline{N}(\alpha, E) + (1 + \alpha)^\rho N\left(\frac{\beta}{1 + \alpha}, E\right), \quad (4.6)$$

где  $\rho = \rho(\infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r)$ .

Легко видеть, что для того, чтобы обе функции  $N(\alpha, E)$  и  $\underline{N}(\alpha, E)$  были непрерывными на полуоси  $[0, \infty)$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} N(\alpha, E) = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow +0} \underline{N}(\alpha, E) = 0.$$

Обозначим  $f_0(r, E) = \mu((r, r_0] \times E)$ ,  $r < r_0$ . Иногда мы будем рассматривать функцию

$$\overset{\circ}{N}(\alpha, E) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f_0(r + \alpha r, E) - f_0(r, E)}{V(r)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu((r, r + \alpha r] \times E)}{V(r)}. \quad (4.7)$$

Иногда возникает необходимость оценивать функцию  $f(r, E)$  с помощью функций  $N(\alpha, E)$  и  $\underline{N}(\alpha, E)$ . В этом случае наряду с функцией  $V(r) = r^{\rho(r)}$  полезна функция

$$S_1(r) = 1 + \int_1^r \frac{V(t)}{t} dt.$$

Как показывает опыт, применение функции  $S_1(r)$  становится неэффективным, если эта функция является ограниченной. В случае ограниченности функции  $S_1(r)$  применяют функцию

$$S_2(r) = \int_r^{\infty} \frac{V(t)}{t} dt.$$

С помощью правила Лопиталя получаем, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V(r)}{S_1(r)} = \rho. \quad (S_1(r) - \text{не ограничена}) \quad (4.8)$$

Имеем

$$\int_r^{er} \frac{V(t)}{t} dt = r^{n-2} \int_1^e \frac{V(ur)}{u} du.$$

Поскольку

$$\frac{V(ur)}{V(r)} \Rightarrow u^\rho, \quad r \rightarrow \infty, \quad u \in [1, e],$$

то

$$\int_r^{er} \frac{V(t)}{t} dt = (1 + o(1)) \frac{e^\rho - 1}{\rho} V(r),$$

Из этого следует, что  $V(r) \rightarrow 0$  ( $r \rightarrow \infty$ ), если  $S_1(r)$  – ограниченная функция.

Вновь применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V(r)}{S_2(r)} = -\rho. \quad (S_1(r) - \text{ограничена}) \quad (4.9)$$

Из этих равенств видно, что функции  $S_1(r)$  и  $S_2(r)$  особенно важны в случае  $\rho = \rho(\infty) = 0$ . В этом случае функции  $S_1(r)$  и  $V(r)$ , а также функции  $S_2(r)$  и  $V(r)$  имеют различный рост на бесконечности.

**Лемма 4.1.** Пусть  $\rho(r)$  – произвольный уточнённый порядок,  $\mu$  – вещественная радо-нова мера на  $\mathbb{R}_0^n, E$  – множество из единичной сферы,  $N(\alpha, E)$  – верхняя плотность меры  $\mu$  относительно уточнённого порядка  $\rho(r)$ , причём  $N(\alpha_0, E) < +\infty$  для некоторого  $\alpha_0 > 0$ . Тогда существует постоянная  $M > 0$  такая, что для всех  $r > 1$  выполняется неравенство

$$f(r, E) \leq MS_1(r).$$

*Доказательство.* Имеем

$$f(r, E) = f\left(\frac{r}{(1+\alpha)^{n_0}}, E\right) + \sum_{m=1}^{n_0} \left[ f\left(\frac{r}{(1+\alpha)^{m-1}}, E\right) - f\left(\frac{r}{(1+\alpha)^m}, E\right) \right] \quad (4.10)$$

Число  $n_0$  определяется из условия

$$1 < \frac{r}{(1 + \alpha_0)^{n_0}} \leq 1 + \alpha_0.$$

Очевидно, что существуют постоянные  $M_1, M_2, M_3$  такие, что выполняются неравенства

$$f(x, E) \leq M_1, \quad x \in (1, 1 + \alpha_0],$$

$$f\left(\frac{r}{(1 + \alpha)^{m-1}}, E\right) - f\left(\frac{r}{(1 + \alpha)^m}, E\right) \leq M_2 V\left(\frac{r}{(1 + \alpha)^{m-1}}\right), \quad (4.11)$$

$$\frac{V(R)}{\int_R^{(1+\alpha_0)R} \frac{V(t)}{t} dt} \leq M_3, \quad R \geq 1. \quad (4.12)$$

Из этих неравенств и равенства (4.10) легко следует утверждение леммы. Лемма доказана.

При использовании верхней и нижней плотности важную роль играют теоремы о равномерности. Одну из таких теорем мы докажем ниже.

**Теорема.** Пусть  $\rho(r)$  – произвольный уточнённый порядок,  $E$  – множество из единичной сферы, пусть  $h > 0, b > 0$ . Тогда, если при  $\alpha \in \left[-\frac{1}{2}, 2b\right]$  выполняется неравенство

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{f(r + \alpha r, E) - f(r, E)}{V(r)} \leq h, \quad (4.13)$$

то равномерно на сегменте  $[a, b]$  выполняется неравенство

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{f(r + \alpha r, E) - f(r, E)}{V(r)} \leq 5h.$$

Последнее означает, что функция

$$\varepsilon(r, \alpha) = \left( \frac{f(r + \alpha r, E) - f(r, E)}{V(r)} - 5h \right)_+$$

Равномерно на сегменте  $[0, b]$  стремится к нулю при  $r \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Обозначим  $f(r) = f(r, E)$ ,  $r = e^x$ ,  $1 + \alpha = e^\tau$ ,  $\varphi(x) = f(e^x)$ ,  $\Phi(x) = V(e^x)$ . В новых обозначениях неравенство (4.13) выглядит так

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x + \tau) - \varphi(x)}{\Phi(x)} \leq h, \quad \tau \in [-\ln 2, \ln(1 + 2b)]. \quad (4.14)$$

Если утверждение теоремы неверно, то существуют последовательность  $x_m \rightarrow \infty$  и последовательность  $\tau_m \in [0, \ln(1 + b)]$  такие, что выполняется неравенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x_m + \tau_m) - \varphi(x_m)}{\Phi(x_m)} > 5h, \quad (4.15)$$

Пусть  $\delta \in (0, \min(\ln 2, \ln(1 + 2b) - \ln b))$ . Обозначим

$$E_m = \{\alpha \in [0, \delta]: \varphi(x_k + \alpha) - \varphi(x_k) \leq 2h\Phi(x_k) \forall k \geq m\}.$$

$E$  – возрастающая последовательность измеримых множеств. Из неравенства (4.14) следует, что  $\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m = [0, \delta]$ . Поэтому  $\lim_{m \rightarrow \infty} \text{mes } E_m = \delta$ .

Далее обозначим

$$F_m = \{\beta \in [-\delta, \ln(1 + b)]: \varphi(x_k + \tau_k) - \varphi(x_k + \tau_k - \beta) \leq 2h\Phi(x_k + \tau_k - \beta) \forall k \geq m\}.$$

$F_m$  – также возрастающая последовательность измеримых множеств. Из неравенства (4.14) следует, что  $\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m = [-\delta, \ln(1 + b)]$ .

Поэтому  $\lim_{m \rightarrow \infty} \text{mes } F_m = \ln(1 + b) + \delta$ .

Пусть  $\delta_1 \in (0, \frac{1}{2}\delta)$ . Тогда существует число  $p_0$  такое, что при  $p \geq p_0$  будут выполняться неравенства  $\text{mes } E_p > \delta - \delta_1$ ,  $\text{mes } F_p > \ln(1 + b) + \delta - \delta_1$ .

Обозначим  $F'_p = \{\tau_p\} - F_p$  (арифметическая разность множеств).

Справедливы включения

$$E_p \subset [0, \delta] \subset [\tau_p - \ln(1 + b), \tau_p + \delta], \\ F'_p \subset [\tau_p - \ln(1 + b), \tau_p + \delta].$$

Оба множества  $E_p$  и  $F'_p$  являются частью сегмента  $[\tau_p - \ln(1 + b), \tau_p + \delta]$ . Сумма мер этих множеств больше длины указанного сегмента. Поэтому пересечение этих множеств не пусто. Пусть  $\alpha \in E_p \cap F'_p$ . Тогда  $\alpha = \tau_p - \beta$ , где  $\beta \in F_p$ . Поэтому выполняются неравенства

$$\varphi(x_p + \alpha) - \varphi(x_p) \leq 2h\Phi(x_p), \\ \varphi(x_p + \tau_p) - \varphi(x_p + \tau_p - \beta) \leq 2h\Phi(x_p + \tau_p - \beta).$$

Складывая эти неравенства, и учитывая равенство  $x_p + \alpha = x_p + \tau_p - \beta$ , получим

$$\varphi(x_p + \tau_p) - \varphi(x_p) \leq 4h\Phi(x_p) + 2h(\Phi(x_p + \alpha) - \Phi(x_p)).$$

Обозначим  $r_p = e^{x_p}$ . Далее находим

$$\frac{\varphi(x_p + \alpha) - \varphi(x_p)}{\varphi(x_p)} = \frac{V(e^\alpha r_p) - V(r_p)}{V(r_p)} \rightarrow e^{p\alpha} - 1 \quad (p \rightarrow \infty).$$

Так как  $\alpha \in (0, \delta)$ , то при достаточно малых  $\delta$  и достаточно больших  $p$  будет выполняться неравенство  $\varphi(x_p + \tau_p) - \varphi(x_p) \leq 5h\Phi(x_p)$ . Это противоречит (4.15). Теорема доказана.

В леммах 4.3 и 4.4, где встречается функция  $\mu([r, \infty) \times E)$ , она определяется различным образом. Сейчас мы сформулируем условия, обеспечивающие существование предела  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \mu((r, R] \times E)$ . При выполнении этих условий функции, которые в леммах 4.3 и 4.4 обозначены одним символом  $\mu([r, \infty) \times E)$ , совпадают.

### *Список литературы*

1. Kadets, V.M. (2006), A course of Functional Analysis, Kharkov National University.
2. Van Quynh Nguyen (2015), Various Types of Convergence of Sequences of Subharmonic Functions, Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom, Volume 11, Number 1, 63–74.
3. Nguyen Van Quynh, Theorem on uniform continuity of Logarithmic potential, Visnyk of science and education, Issue 5 (59), 6-10p.
4. Nguyen Van Quynh, Le Anh Thang (2021), THEOREM ON THE REPRESENTATION MEASURES "Мировая наука" №3 (48) 2021.
5. Nguyen Van Quynh, Le Anh Thang (2021), THEOREM ON A COMPACT SET IN THE SPACE OF RADON MEASURES "Мировая наука" №11 (56) 2021.